

Leçon 191 : Techniques d'algèbre en géométrie.

[Bec] : *Objectif agrégation*, Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Cal-Per] : *Carnet de voyage en Algèbre*, Phillipe Caldero, Marie Peronnier

[Goz] : *Théorie de galois*, Ivan Gozard

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

[Tau] : *Géométrie*, Patrice Tauvel

I Partie A - Déterminant et géométrie

I.1 Interprétation géométrique [Bri-Pag] [Gri]

 **Dév 1 (Interprétation géométrique du déterminant) :**

 **Dév 2 (Exemple du parallépipède) :**

Ex 3 : Triangle

I.2 Orientation [Gri]

Déf 4 (Orientation de bases) :

Prop 5 (Classes d'orientation) :

Ex 6 : Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$.

I.3 Matrices de Gram [Rom] [Gou]

Déf 7 (Matrice, déterminant de Gram) :

Thm 8 (Distance à un sev) :

App 9 (Hadamard) :

App 10 : Si A est telle que $a_{ij} \leq c$, alors $|\det(A)| \leq c^n n^{n/2}$.

II Partie B - Isométries

II.1 Géométrie affine

II.2 Isométries vectorielle [Szp]

Déf 11 (Isométrie vectorielle) :

Contre-Ex 12 : Homothéties.

Ex 13 : Projecteur orthogonal, symétrie orthogonale

Rem 14 : Traduction matricielle.

Déf 15 (Matrice orthogonale) :

Ex 16 : Les matrices de permutations.

Déf 17 (Réflexion) :

Thm 18 (Cartan-Dieudonné) :

II.3 Isométries affines

Déf 19 (Isométrie affine) :

Ex 20 : Les homothéties-translations qui sont des isométries sont les translations et les symétries centrales.

Ex 21 : Les symétries orthogonales et les réflexions sont des isométries.

Prop 22 : Une isométrie est affine.

Thm 23 (Décomposition canonique) :

II.4 Petites dimensions [Szp]

Déf 24 (Rotations et symétries orthogonales) :

Ex 25 : [Annexe : Rotations et symétries].

Prop 26 (Structure de $O_2(\mathbb{R})$) :

App 27 : $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

App 28 (Structure de $Is(\mathbb{R}^2)$) :

Prop 29 (Sous-groupes de $SO_2(\mathbb{R})$) :

III Partie C - Utilisation des groupes en géométrie

III.1 Actions de groupes [Szp] [Cal-Per]

■ Déf 30 (Action de groupe) :

■ Thm 31 (Formule de Burnside) :

■ Déf 32 (Cube, tétraèdre) :

■ Thm 33 (Isométries du cube, tétraèdre) :

■ Thm 34 (Colier de perles) :

■ Déf 35 (Groupe modulaire) :

■  Dév 36 (Action sur $\mathbb{H}$) :

■  Dév 37 (Pavage de $\mathbb{H}$) :

III.2 Pavage du plan [Tau]

■ Déf 38 (Pavage) :

■  Dév 39 (Classification des pavages directs) :

IV Partie D - Convexité et géométrie [Szp] [Bec]

■ Thm 40 (Projection sur un convexe) :

■  Dév 41 (Hahn-Banach géométrique) :

■  Dév 42 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$) :

■ Thm 43 (Helly) :

V Partie E - Quand la théorie des corps s'invite [Goz] [Ber]

V.1 Nombres constructibles

■ Déf 44 (Points constructibles à partir d'un ensemble) :

■ Ex 45 : Constructions géométriques ([Goz]).

■ Déf 46 (Nombres constructibles) :

■ Thm 47 : L'ensemble des nombres constructibles forme un corps, stable par racine carrée.

■ App 48 : Quelques exemples de nombres constructibles.

■ Thm 49 (Wantzel) :

V.2 Problèmes grecs

■ App 50 : $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible + duplication du cube.

V.3 Polygone constructible

■ Déf 51 (Polygone constructible) :

■ Thm 52 (Gauss-Wantzel) :

■ Ex 53 : Le pentagone est constructible.